



بهینه سازی
بهینه سازی مقید

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

شرایط بهینگی بیشینه‌سازی نامقید

قضیهٔ شروط لازم بیشینه محلی ضعیف

▪ الف ۱: $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$ نقطه مانا

▪ الف ۲: $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ منفی نیمه‌معین

قضیهٔ شروط کافی بیشینه محلی قوی

▪ ب ۱: $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$

▪ ب ۲: $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ منفی معین

شرایط بهینگی کمینه‌سازی نامقید

قضیهٔ شروط لازم کمینه محلی ضعیف

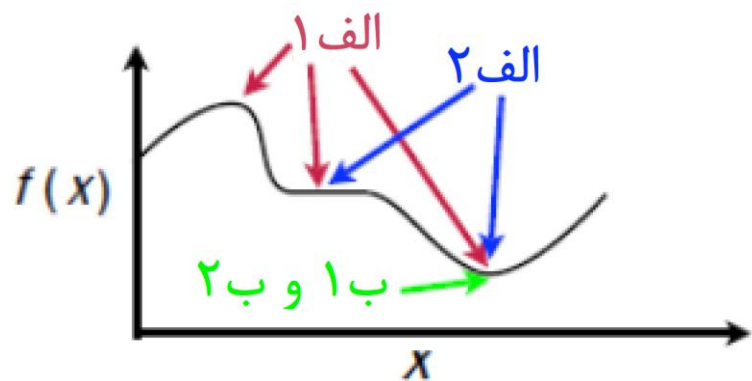
الف ۱: $\nabla f(x^*) = 0$ نقطه مانا

الف ۲: $\nabla^2 f(x^*)$ مثبت نیمه‌معین

قضیهٔ شروط کافی کمینه محلی قوی

ب ۱: $\nabla f(x^*) = 0$

ب ۲: $\nabla^2 f(x^*)$ مثبت معین



شرایط بهینگی بیشینه‌سازی نامقید

جهت بهینه‌سازی نامقید صرفاً شروط اول و دوم جهت تایید نقطه بهینه

بهینه‌سازی مقید

- افزوده شدن سربار منطقه‌شدنی در بهینه‌سازی مقید
- لزوم واقع شدن نقطه بهینه در منطقه‌شدنی

شروط لازم مرتبه اول ترکیب انواع قیدها

x^* کمینه‌ساز محلی روی مجموعه مقید دارای m تساوی و k نامساوی

فرض تعداد k_0 نامساوی از نوع قید مانع (binding) و $k - k_0$ نامساوی از شمار قید غیرمانع (non binding)

فرض ماتریس ژاکوبی رتبه کامل

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m) = f(x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i [h_i(x) - b_i] - \sum_{i=1}^m \mu_i [g_i(x) - c_i]$$

$$\text{I) } \frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\text{II) } \lambda_i^* [h_i(x^*) - b_i] = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\text{III) } g_i(x^*) = c_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\text{IV) } h_i(x^*) \geq b_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\text{V) } \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

نیاز به توجه به شرط ناتبه‌دگی

شروط لازم مرتبه اول ترکیب انواع قیدها

\mathbf{x}^* بیشینه‌ساز محلی روی مجموعه مقید دارای m تساوی و k نامساوی

فرض تعداد k_0 نامساوی از نوع قید مانع (binding) و $k - k_0$ نامساوی از شمار قید غیرمانع (non binding)

فرض ماتریس ژاکوبی رتبه کامل

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i [h_i(\mathbf{x}) - b_i] - \sum_{i=1}^m \mu_i [g_i(\mathbf{x}) - c_i]$$

$$\text{I) } \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\text{II) } \lambda_i^* [h_i(\mathbf{x}^*) - b_i] = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

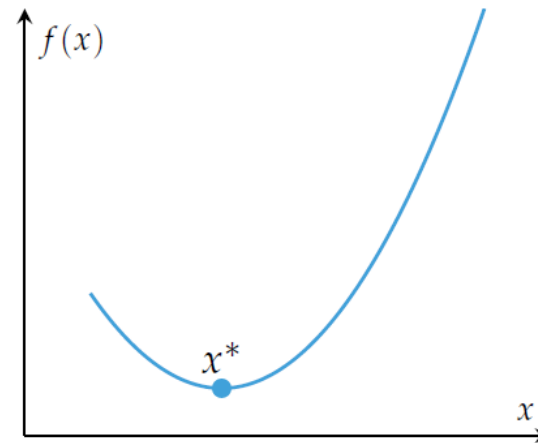
$$\text{III) } g_i(\mathbf{x}^*) = c_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\text{IV) } h_i(\mathbf{x}^*) \leq b_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\text{V) } \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

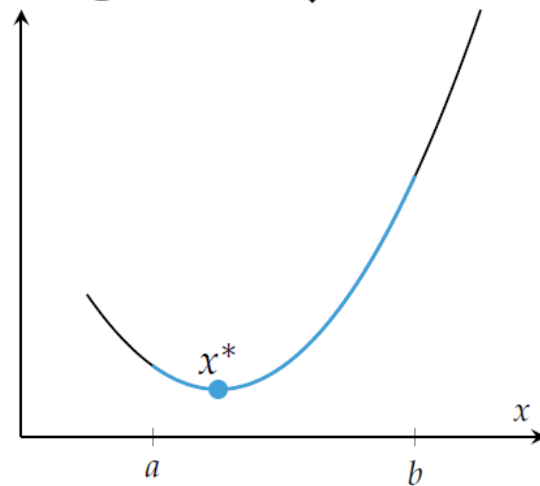
تأثير قيد و محدوديت

نامقيد

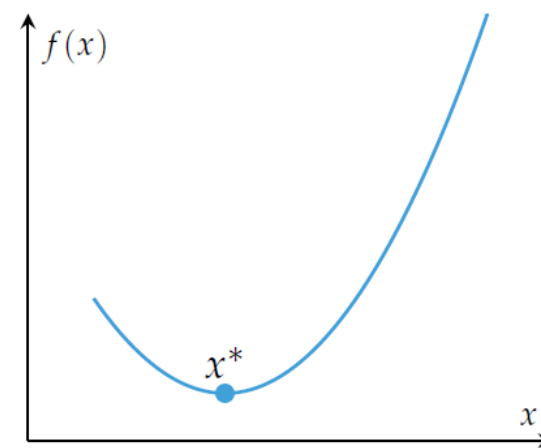


تأثير قيد و محدودیت

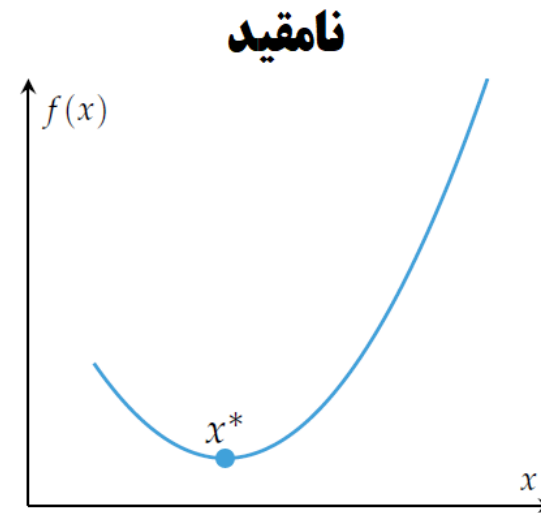
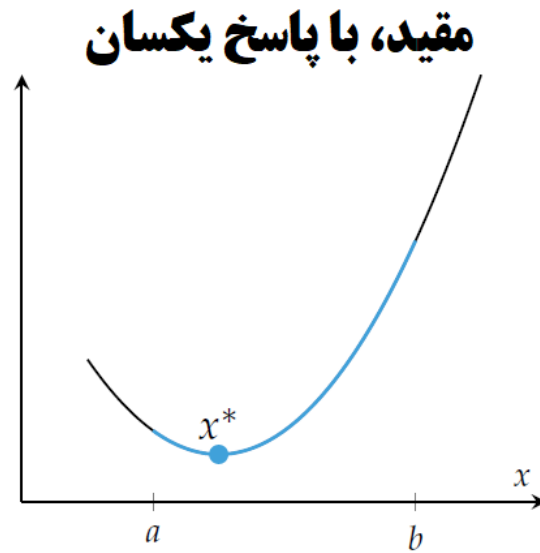
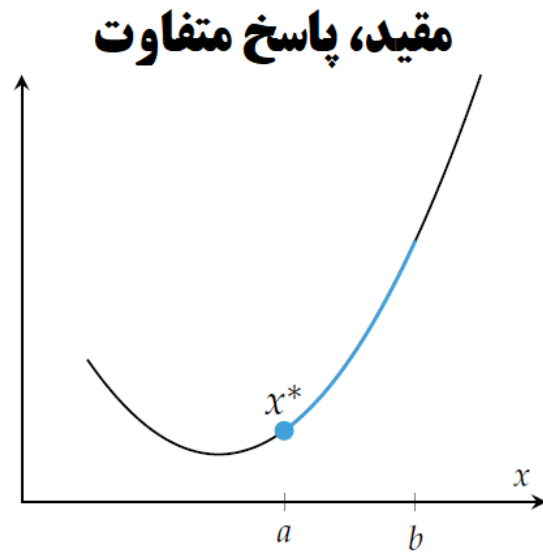
مقید، با پاسخ یکسان



نامقید



تأثير قيد و محدوديت



تدوین ریاضی

کمینه‌سازی یا بیشینه‌سازی تابع با در نظر گرفتن قیدهایی روی متغیرهای تابع \mathbf{x} بردار متغیرها (یا مجهول‌ها، پارامترها)

f تابع هدف، تابعی (عددی) از \mathbf{x} که قصد بیشینه یا کمینه کردن آن را داریم

c_i توابع نمایشگر قیدهایی شامل تساوی‌ها و نامساوی‌ها که مقادیر \mathbf{x} پاسخ تابع f باید آن‌ها را رعایت کنند

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

با توجه

$$c_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i \in \mathcal{E}$$

$$c_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i \in \mathcal{I}$$

\mathcal{E} و \mathcal{I} مجموعه اندیس‌های قیدهای تساوی و نامساوی

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

با توجه

$$g_i(\mathbf{x}) = c_i, i \in \mathcal{E}$$

$$h_i(\mathbf{x}) \leq b_i, i \in \mathcal{I}$$

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

با توجه

$$g_i(\mathbf{x}) = c_i, i \in \mathcal{E}$$

$$h_i(\mathbf{x}) \geq b_i, i \in \mathcal{I}$$

مجموعه فعال

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{E} \cup \{i \in I \mid c_i(\mathbf{x}) = 0\}.$$

تک قید تساوی

در نظر گرفتن تابعی

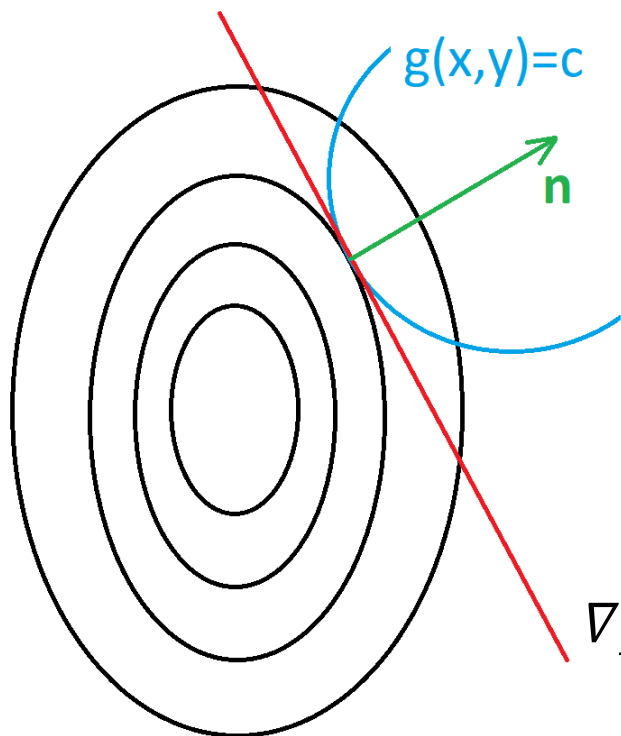
$$f(x, y) = z$$

با محدودیتی

$$g(x, y) = c$$

f سطح و c ثابت

$g(x, y) = z$ سطح تراز از سطح



سطح ترازهای f

$$\nabla f(x, y) = k \nabla g(x, y)$$

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$$

گرادیان‌ها موازی یکدیگر

گرادیان‌های منحنی‌های تراز مضربی از یکدیگر

برای سه بعد و بیشتر:

روش ضرائب لاگرانژ

روشی قدرتمند در حل مسائل بهینه‌سازی مقید
▪ بیشینه یا کمینه با استفاده از ضرائب لاگرانژ یافت می‌شود

یافتن حجم بیشینه جعبه‌ای با قید اینکه هزینه خرید ماده ثابت باشد.

تابع لاگرانژ

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 [g(\mathbf{x}) - c]$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda_1^*) = 0$$

شرط لازم مرتبه اول

قضیه لاگرانژ

f و g توابعی مشتق پذیر هستند. به طوری که f دارای نقطه اکسترمم در (\mathbf{x}^*) بر سطح منحنی $g(\mathbf{x}) = c$ است. اگر $\nabla g(\mathbf{x}^*) \neq 0$ ، آن گاه عدد λ وجود دارد به طوری که $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}^*)$.

λ را ضریب لاگرانژ خوانند.

مثال

$$\text{Max } f(x, y) = 4xy$$

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

حل

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

$$\Rightarrow 4y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j} = \lambda \frac{2x}{9}\mathbf{i} + \lambda \frac{y}{8}\mathbf{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y = \lambda \frac{2x}{9} \\ 4x = \lambda \frac{y}{8} \\ \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{18y}{x} \xrightarrow{\text{جانشینی}} 4x = \lambda \frac{y}{8}$$

$$4x = \lambda \frac{y}{8} = \frac{18y}{x} \frac{y}{8} \Rightarrow 4x = \frac{9y^2}{4x}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{16}$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\Rightarrow y = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow f_{\max} = 24$$

مثال ۲

$$f(x, y) = x + 2y - 2z$$

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$$

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$$

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

$$\Rightarrow \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = \lambda (2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = 2x\lambda \rightarrow x = \frac{1}{2\lambda} \\ 2 = 4y\lambda \rightarrow y = \frac{1}{2\lambda} \\ -2 = 8z\lambda \rightarrow z = -\frac{1}{4\lambda} \\ x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\lambda} + 2\frac{1}{2\lambda} + 4\left(-\frac{1}{4\lambda}\right)^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \rightarrow x = 0.5, y = 0.5, z = -.25 \\ \lambda = -1 \rightarrow x = -0.5, y = -0.5, z = .25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \rightarrow f(0.5, 0.5, -.25) = 2 \text{ بیش} \\ \lambda = -1 \rightarrow f(-0.5, -0.5, .25) = -2 \text{ کم} \end{cases}$$

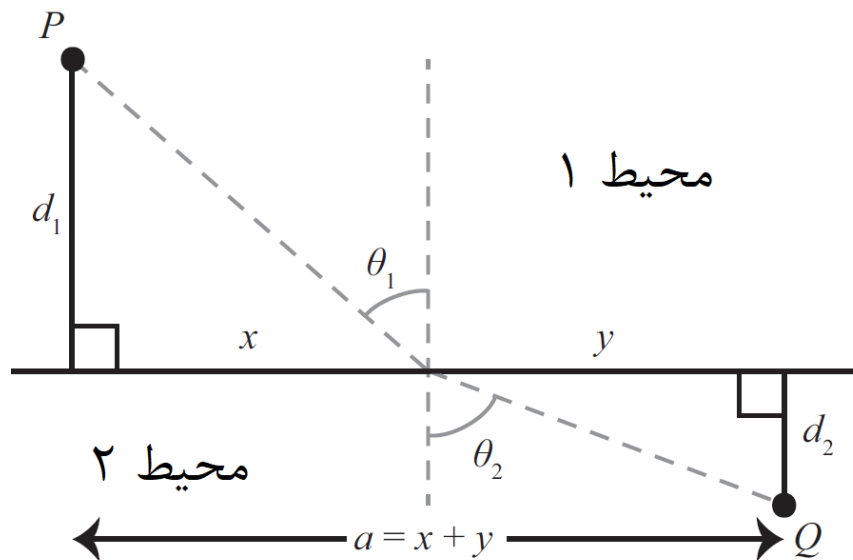
قانون اسنل (شکست نور)

نور هنگام گذر از محیط شفاف به محیط شفاف دیگر در سطح محیط دوم خم می‌شود تا مسیری با کمترین زمان را طی کند

قانون شکست اسنل

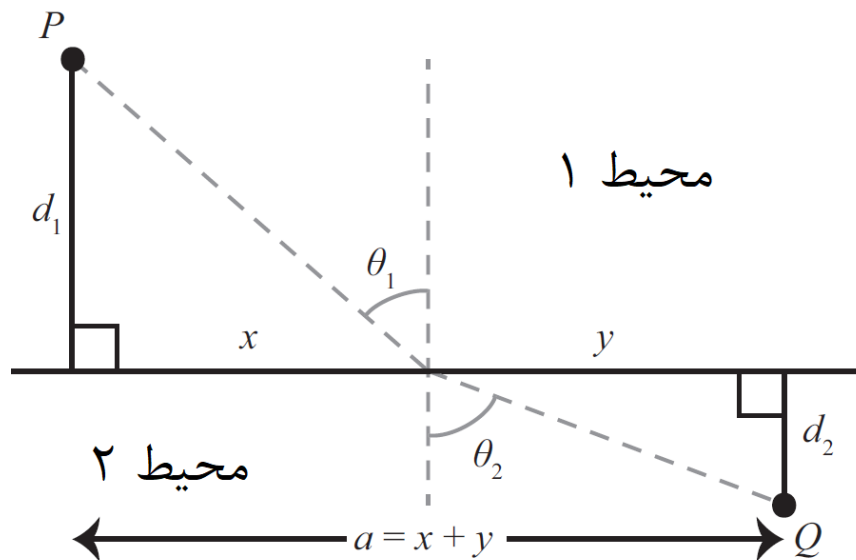
قانون شکست نور

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$



قانون اسنل (شکست نور)

نور هنگام گذر از محیط شفاف به محیط شفاف دیگر در سطح محیط دوم خم می‌شود تا مسیری با کمترین زمان را طی کند



فرض: v_1 و v_2 سرعت نور در دو محیط

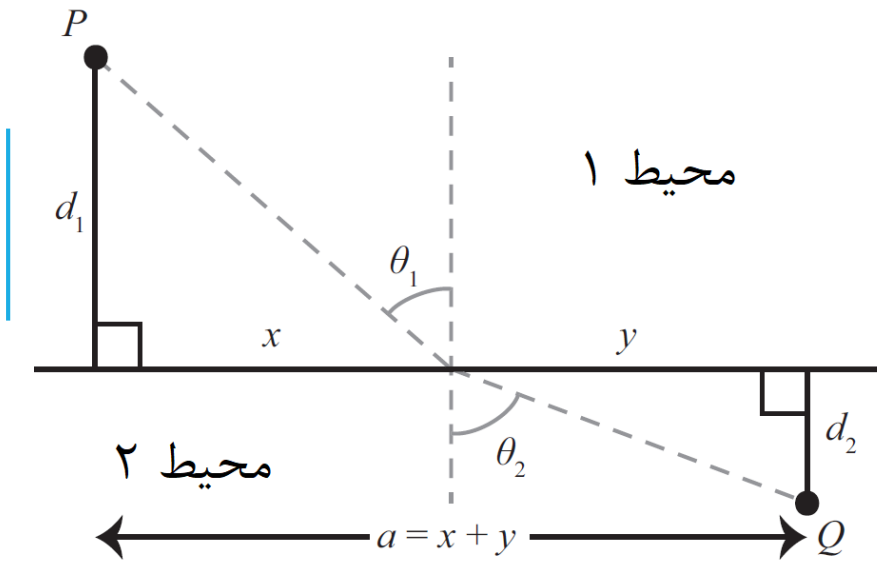
فاصله از P تا Q: $\sqrt{d_1^2 + x^2} + \sqrt{d_2^2 + y^2}$

سرعت برابر با مسافت تقسیم بر زمان، پس

$$T(x,y) = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{d_2^2 + y^2}}{v_2} \quad \blacksquare$$

$$g(x,y) = x + y = a \quad \text{با قید } \blacksquare$$

قانون اسنل (شکست نور)



$$T(x,y) = \frac{\sqrt{d_1^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{d_2^2+y^2}}{v_2}$$

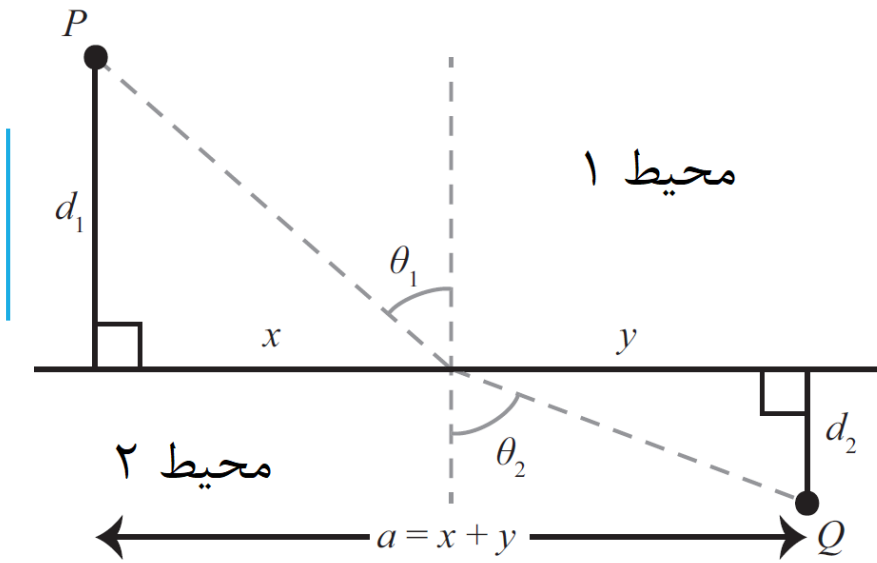
$$g(x,y) = x + y = a \text{ با قيد}$$

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{v_1 \sqrt{d_1^2+x^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{v_2 \sqrt{d_2^2+y^2}} \mathbf{j} = \lambda \mathbf{i} + \lambda \mathbf{j}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x}{v_1 \sqrt{d_1^2+x^2}} \\ y \\ \frac{y}{v_2 \sqrt{d_2^2+y^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

قانون اسنل (شکست نور)



$$T(x,y) = \frac{\sqrt{d_1^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{d_2^2+y^2}}{v_2}$$

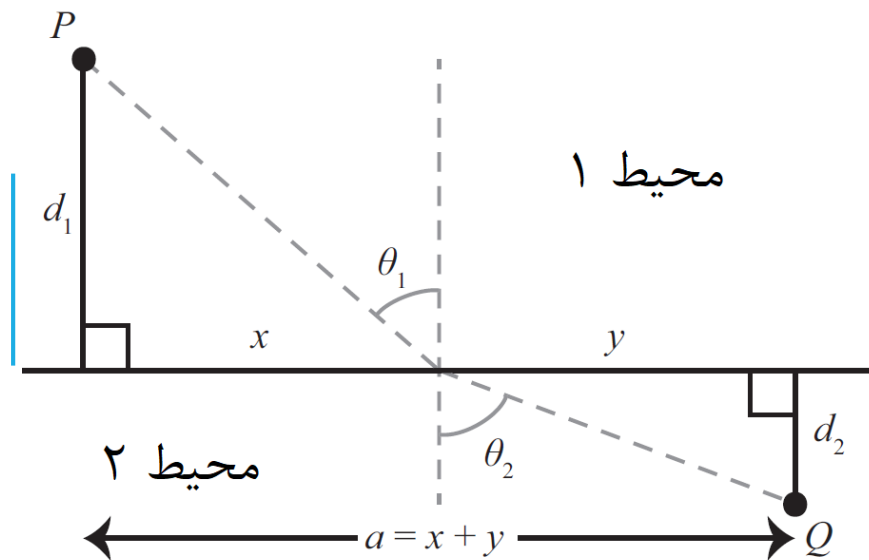
باقید $g(x,y) = x + y = a$

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{x}{v_1 \sqrt{d_1^2+x^2}} \\ \frac{y}{v_2 \sqrt{d_2^2+y^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{v_1 \sqrt{d_1^2+x^2}} = \lambda \\ \frac{y}{v_2 \sqrt{d_2^2+y^2}} = \lambda \\ x + y = a \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{v_1 \sqrt{d_1^2+x^2}} = \frac{y}{v_2 \sqrt{d_2^2+y^2}}$$

قانون اسنل (شکست نور)



$$\frac{x}{v_1 \sqrt{d_1^2 + x^2}} = \frac{y}{v_2 \sqrt{d_2^2 + y^2}}$$

$$\begin{cases} \sin \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{d_1^2 + x^2}} \\ \sin \theta_2 = \frac{y}{\sqrt{d_2^2 + y^2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

مثال ٤

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

$$x^2 + y^2 = 8$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

$$(2x + y)\mathbf{i} + (2y + x)\mathbf{j} = \lambda(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2x + y) = \lambda(2x) \rightarrow y = 2\lambda x - 2x \rightarrow y = 2x(\lambda - 1) * \\ (2y + x) = \lambda(2y) \rightarrow x = 2\lambda y - 2y \rightarrow x = 2y(\lambda - 1) \rightarrow x = 2(2x(\lambda - 1))(\lambda - 1) \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

$$x = 4x(\lambda - 1)^2 \rightarrow x(4(\lambda - 1)^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ نامعتبر} \\ 4(\lambda - 1)^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1.5 \rightarrow y = x \\ \lambda = 0.5 \rightarrow y = -x \end{cases} \end{cases}$$

$$\lambda = 1.5 \Rightarrow y = x \Rightarrow x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow x^2 + x^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 2, y = 2 \\ x = -2, y = -2 \end{cases}$$

$$\lambda = 0.5 \Rightarrow y = -x \Rightarrow x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow x^2 + x^2 = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 2, y = -2 \\ x = -2, y = 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(2,2) = 12 \\ f(2,-2) = 12 \end{array} \right\} \text{بیش}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-2,2) = 4 \\ f(-2,-2) = 4 \end{array} \right\} \text{کم}$$

چند قید تساوی

در نظر گرفتن تابعی

$$f(\mathbf{x}) = z$$

با محدودیت‌های

$$g_1(\mathbf{x}) = c_1$$

$$g_2(\mathbf{x}) = c_2$$

c_1 و c_2 ثابت

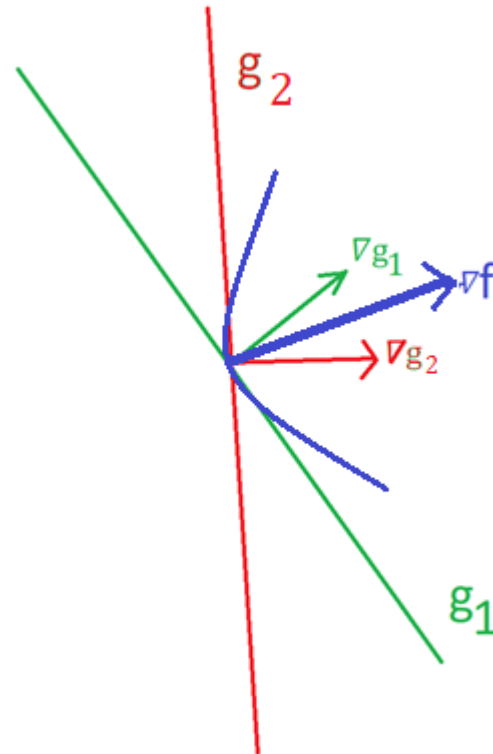
$g(\mathbf{x}) = z$ سطح ترازوی از سطح

چند قید تساوی

$$f(\mathbf{x}) = z$$

$$g_1(\mathbf{x}) = c_1$$

$$g_2(\mathbf{x}) = c_2$$



$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 [g_1(\mathbf{x}) - c_1] - \lambda_2 [g_2(\mathbf{x}) - c_2]$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x})$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \nabla g(\mathbf{x})$$

$$\left. \begin{array}{l} g(\mathbf{x}) = c \\ \lambda > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (g(\mathbf{x}) - c)\lambda = 0$$

چند قید تساوی

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \lambda_1 [g_1(\mathbf{x}) - c_1] - \lambda_2 [g_2(\mathbf{x}) - c_2]$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}) = [\lambda_1, \lambda_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = [\lambda_1, \lambda_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

چند قید تساوی

m قید و n متغیر

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

شرط ناتباہیدگی
رتبه m

چند قید تساوی

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= \mathcal{L}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \\ &= f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x_1, \dots, x_n) - c_i) \end{aligned}$$

شروط لازم جهت بیشینه بودن:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} = 0$$

مثال

$$f(x, y, z) = xyz$$

$$g_1(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 = 1$$

$$g_2(x, y, z) \equiv x + z = 1$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: ماتریس ژاکوبی

رتبه ۱ اگر و فقط اگر $x = y = 0$

▪ ممکن نیست

▪ نادیده‌گیری شرط اول

▪ پس رتبه ۲ و ناتباهیده

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) - \lambda_2(x + z - 1)$$

مثال - ادامه

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = xyz - \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) - \lambda_2(x + z - 1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = yz - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = xz - 2\lambda_1 y = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = xy - \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = x + z - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{xz}{2y}, \lambda_2 = xy$$

$$yz - 2 \frac{xz}{2y} x - xy = 0$$

$$(1 - x^2)(1 - x) - x^2(1 - x) - x(1 - x^2) = 0$$

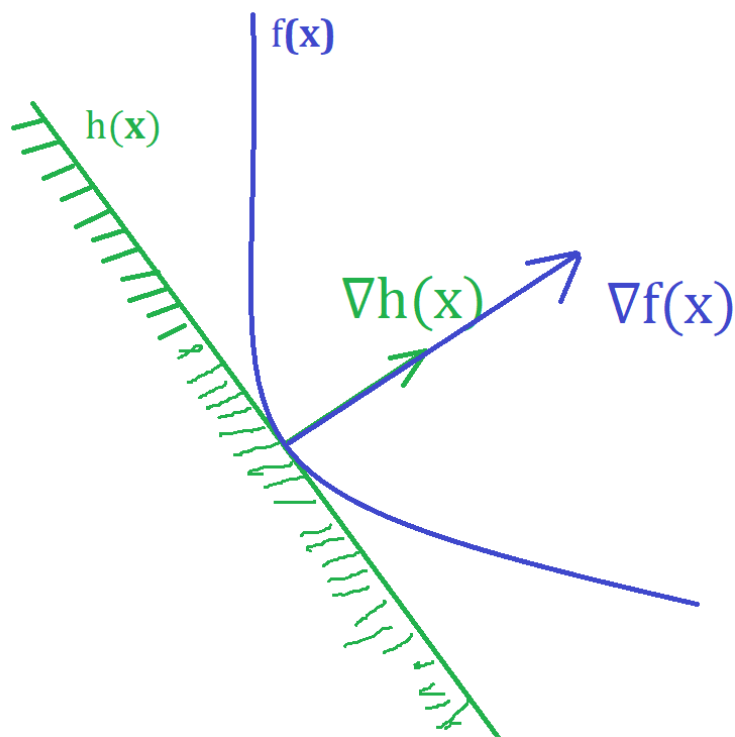
$$(1 - x)[1 - 3x^2 - x] = 0 \Rightarrow \begin{cases} (1 - x) = 0 \\ 1 - 3x^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{6} \\ \frac{-1 - \sqrt{13}}{6} \end{cases}$$

تک قید نامساوی

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

با توجه
 $h(x) \leq b$

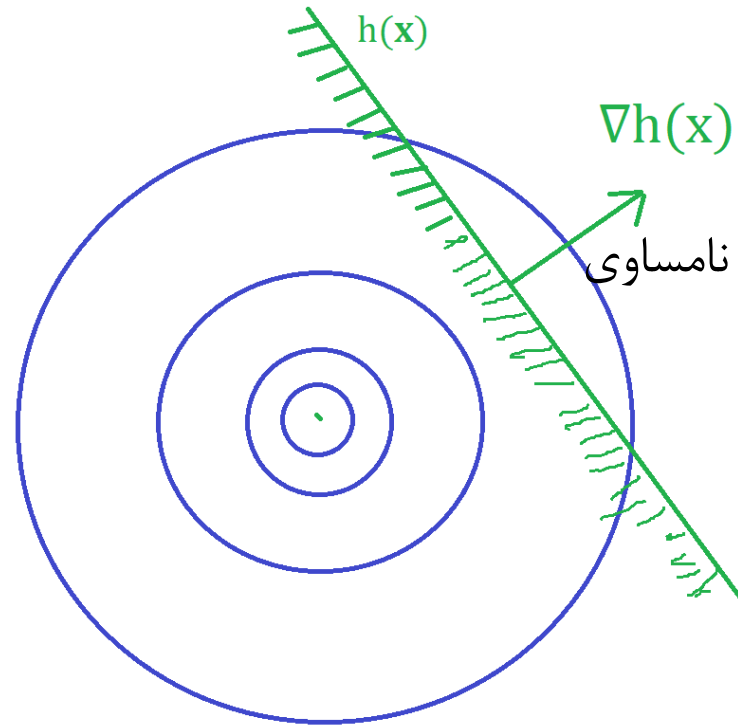


$$\left. \begin{array}{l} \nabla f(x) = \lambda \nabla h(x) \\ h(x) = b \\ \lambda > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (h(x) - b)\lambda = 0$$

تک قید نامساوی

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

با توجه
 $h(x) \leq b$



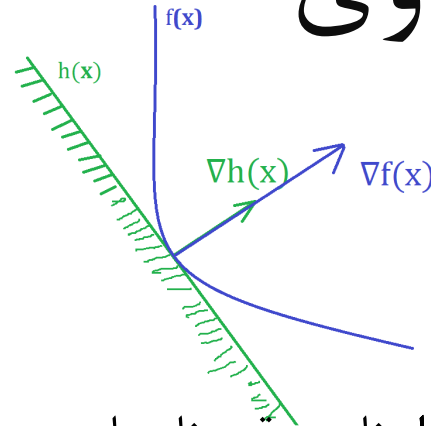
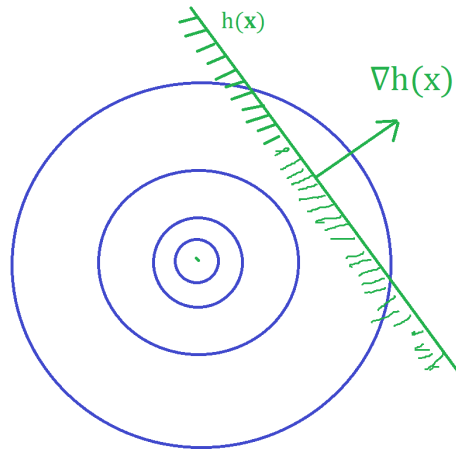
«بیشینه بدون محدودیت» داخل ناحیه قید نامساوی
▪ قید غیرمانع

$$\left. \begin{array}{l} \nabla f(x) = 0 \\ \nabla f(x) = 0 \cdot \nabla h(x) \\ h(x) \leq b \\ \lambda = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (h(x) - b)\lambda = 0$$

تک قید نامساوی

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

با توجه
 $h(x) \leq b$



«بیشینه بدون محدودیت» خارج از ناحیه قید نامساوی
▪ قید مانع

$$\lambda \geq 0 \text{ و } h(x) - b = 0$$

«بیشینه بدون محدودیت» داخل ناحیه قید نامساوی

▪ قید غیرمانع (فارغ یا کم)

$$\lambda = 0 \text{ و } h(x) - b \leq 0$$

⇐ شروط کمبود ممتم

$$[h(x) - b]\lambda = 0$$

⇐ فارغ از مانع بودن یا نبودن

$$\lambda \geq 0$$

$$h(x) \leq b$$

شروط لازم مرتبه اول تک قيد نامساوی

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

با توجه

$$h(\mathbf{x}) \leq b$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda[g(\mathbf{x}) - b]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1, \dots, n$$

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = \lambda[g(\mathbf{x}) - b] = 0 \text{ کمبود مکمل}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial \lambda} = [g(\mathbf{x}) - b] \leq 0 \text{ قيد اصلی}$$

$$\lambda \geq 0$$

چند قید نامساوی

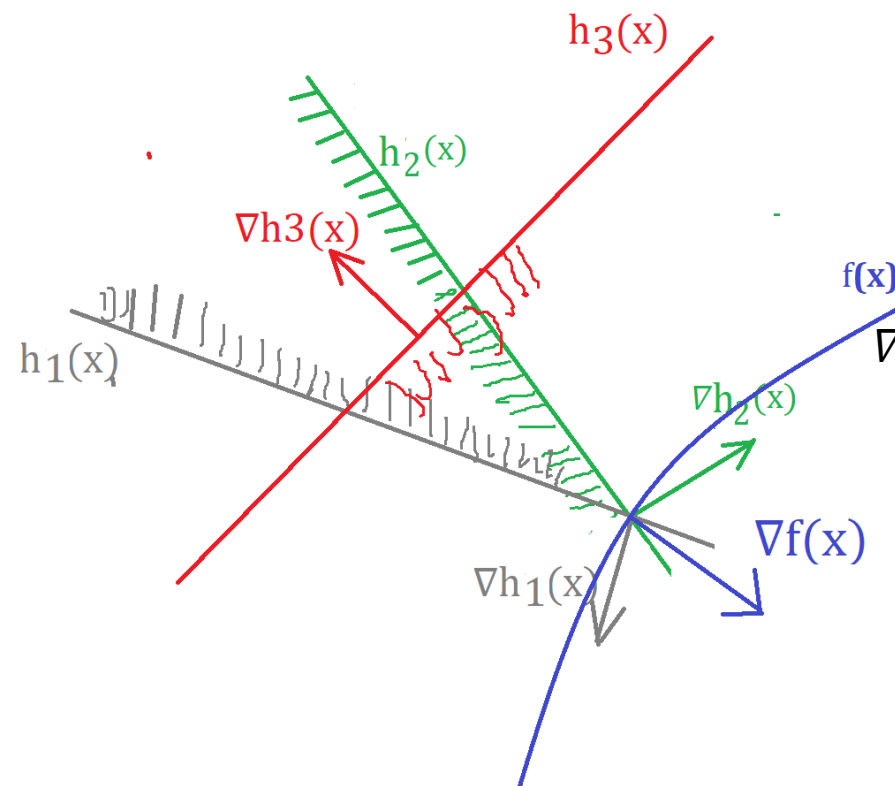
$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

با توجه

$$h_1(x) \leq b_1$$

$$h_2(x) \leq b_2$$

$$h_3(x) \leq b_3$$



$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla h_1(x) + \lambda_2 \nabla h_2(x) + \lambda_3 \nabla h_3(x)$$
$$\nabla f(x) = \lambda \cdot \nabla h(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} h_1(x) = b_1 \\ \lambda_1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (h_1(x) - b_1)\lambda_1 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} h_2(x) = b_2 \\ \lambda_2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (h_2(x) - b_2)\lambda_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} h_3(x) \leq b_3 \\ \lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (h_3(x) - b_3)\lambda_3 = 0$$

شروط لازم مرتبه اول چند قيد نامساوی

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x})$$

با توجه

$$h_1(\mathbf{x}) \leq b_1$$

\vdots

$$h_k(\mathbf{x}) \leq b_k$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \lambda[h(\mathbf{x}) - b]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_n} = 0$$

$$\lambda_1 [h_1(\mathbf{x}) - b_1] = 0, \dots, \lambda_k [h_k(\mathbf{x}) - b_k] = 0$$

$$h_1(\mathbf{x}) \leq b_1, \dots, h_k(\mathbf{x}) \leq b_k$$

$$\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$$

ترکیب انواع قیدها

$$\max f(x_1, \dots, x_n)$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \dots, g_m(x_1, \dots, x_n) = c_m$$

$$h_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1, \dots, h_k(x_1, \dots, x_n) \leq b_k$$

شروط لازم مرتبه اول ترکیب انواع قیدها

\mathbf{x}^* بیشینه‌ساز محلی روی مجموعه مقید دارای m تساوی و k نامساوی

فرض تعداد k_0 نامساوی از نوع قید مانع (binding) و $k - k_0$ نامساوی از شمار قید غیرمانع (non binding)

فرض ماتریس ژاکوبی رتبه کامل

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i [h_i(\mathbf{x}) - b_i] - \sum_{i=1}^m \mu_i [g_i(\mathbf{x}) - c_i]$$

$$\text{I) } \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\text{II) } \lambda_i^* [h_i(\mathbf{x}^*) - b_i] = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\text{III) } g_i(\mathbf{x}^*) = c_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\text{IV) } h_i(\mathbf{x}^*) \leq b_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\text{V) } \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

شروط لازم مرتبه اول ترکیب انواع قیدها

x^* کمینه‌ساز محلی روی مجموعه مقید دارای m تساوی و k نامساوی

فرض تعداد k_0 نامساوی از نوع قید مانع (binding) و $k - k_0$ نامساوی از شمار قید غیرمانع (non binding)

فرض ماتریس ژاکوبی رتبه کامل

$$\mathcal{L}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m) = f(x) - \sum_{i=1}^k \lambda_i [h_i(x) - b_i] - \sum_{i=1}^m \mu_i [g_i(x) - c_i]$$

$$\text{I) } \frac{\partial \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*)}{\partial x_i} = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\text{II) } \lambda_i^* [h_i(x^*) - b_i] = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

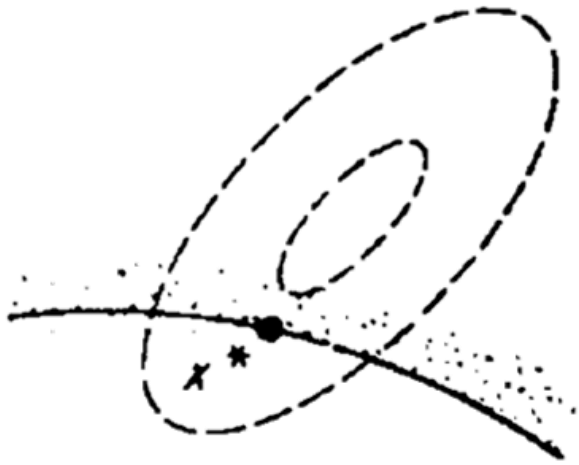
$$\text{III) } g_i(x^*) = c_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\text{IV) } h_i(x^*) \geq b_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\text{V) } \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

نیاز به توجه به شرط ناتبه‌دگی

نسبت قيد و بهينه



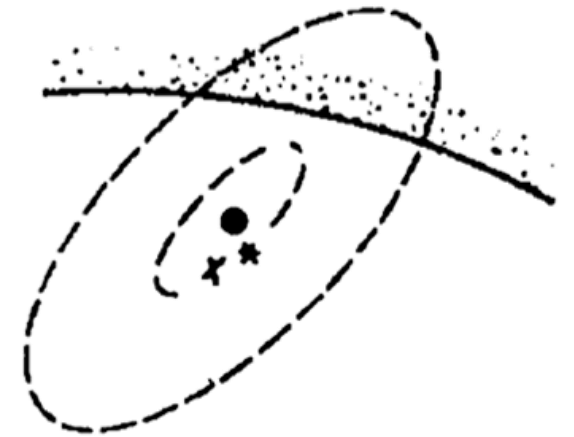
فعال قوى

$$\lambda_1^* > 0, c_1^* = 0$$



فعال ضعيف

$$\lambda_1^* = c_1^* = 0$$



غير فعال

$$\lambda_1^* = 0, c_1^* > 0$$

قیدهای نامساوی

$$\text{Max } \sqrt{x_1 x_2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 5;$$


$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

تبدیل به صورت استاندارد

$$\text{Max } \sqrt{x_1 x_2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0;$$

$$-x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0$$


$$f(x, y) = 3x + 4y$$

$$g_1(x, y) = x^2 + y^2 \leq 4$$

$$g_2(x, y) = -x \leq -1$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = 3x + 4y - \lambda_1(x^2 + y^2 - 4) - \lambda_2(-x + 1), \lambda_1, \lambda_2 > 0$$

$$I) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 3 - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$$

$$II) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 4 - 2\lambda_1 y = 0$$

$$III) \lambda_1(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

$$IV) \lambda_2(-x + 1) = 0$$

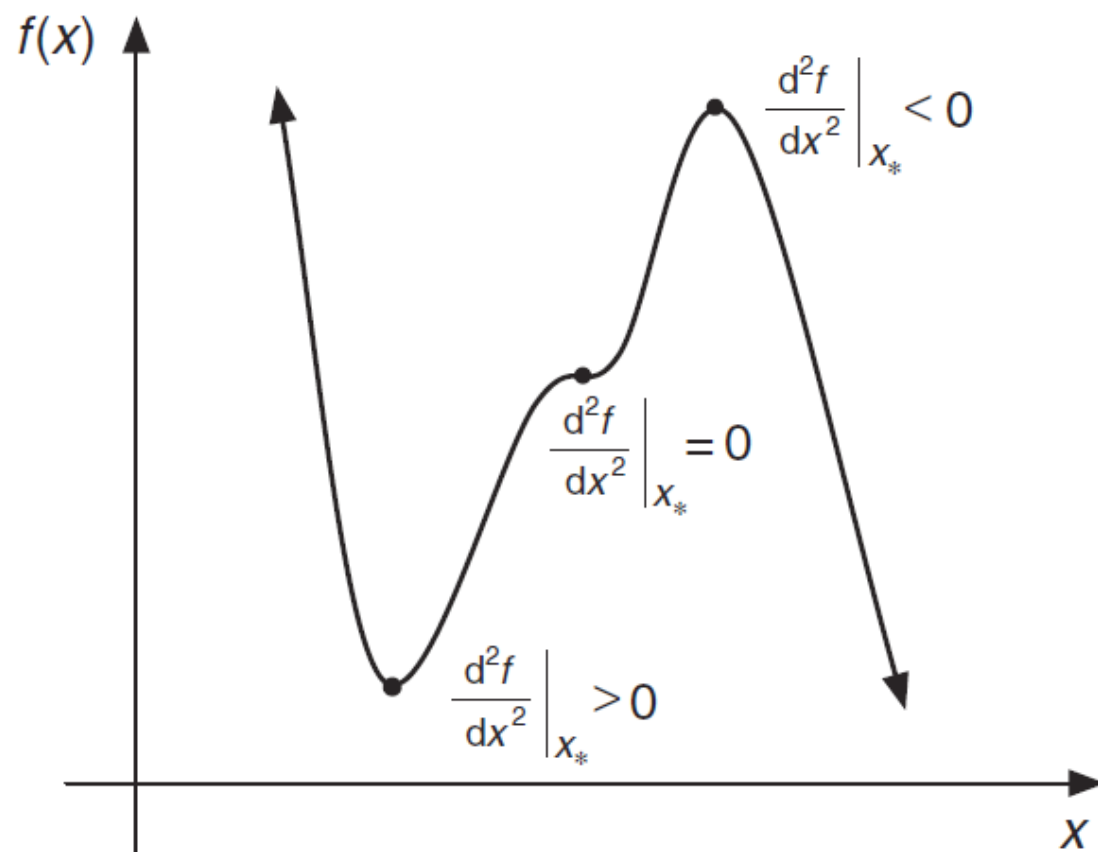
چند ویژگی

ضریب لاگرانژ فراهم کننده اطلاعات حساسیت حول نقطه بهینه

مشکلات

- امکان شکست زمان $\nabla g(x_0, y_0) = 0$
- امکان نیاز به جبر خطی پیچیده و مشکل جهت حل مسئله

شروط بهینگی مرتبه دوم



شرط لازم مرتبه دوم بیشینه

$$\mathbf{d} \cdot \nabla_{xx}^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \lambda^*) \cdot \mathbf{d} \leq 0, \mathbf{d} \in \Lambda(\mathbf{x}^*)$$

$$\Lambda(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{d} \in R^n, (\nabla h_i(\mathbf{x}^*))^T \cdot \mathbf{d} = 0, i = 1, \dots, m, i \in \mathcal{J}(\mathbf{x}^*)\}$$

منابع

B. H. Edwards, “Understanding Multivariable Calculus: Problems, Solutions, and Tips-Course Workbook,” The Great Courses, 2014.

J. Wilde, et al., “Constrained optimization,” 2013.

[فلچر]

B. W. Bader, “Constrained and unconstrained optimization,” 2009